
Contrôle continu 2

Exercice 1. Considérons les deux sous-ensembles de \mathbb{R}^4 suivants :

$$E = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = w = 0, x - z = 0\}$$

et

$$F = Vect(\{(-1, 1, 0, 1), (2, 0, -1, 0), (1, -3, 1, -3)\}).$$

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
2. Trouver une base de E et calculer sa dimension.
3. Donner la dimension et un système d'équations cartésiennes de F .
4. Montrer que E et F sont en somme directe.
5. Donner un espace supplémentaire de $E \oplus F$ dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on appelle trace de M la quantité $Tr(M) := a + d$.

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(M) = (Tr(M), Tr(AM), Tr(BM)).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Sans calculer $Ker f$ ou $Im f$, répondre à la question suivante : est-ce que f est injective ?
3. Calculer la matrice de f dans les bases canoniques de E et de \mathbb{R}^3 .
4. Trouver une base de $Ker f$.
5. Quelle est la dimension de $Im f$?

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel de polynômes d'ordre ≤ 2 et considérons l'application

$$\Psi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]; \quad \Psi(P)(X) = P''(2) \cdot (X^2 - 1) + P'(1) \cdot (X - 1) + P(0) \cdot (X^2 + X).$$

1. Montrer que Ψ est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice de Ψ dans la base canonique $\{1, X, X^2\}$.
3. L'application linéaire Ψ est-elle un isomorphisme ?